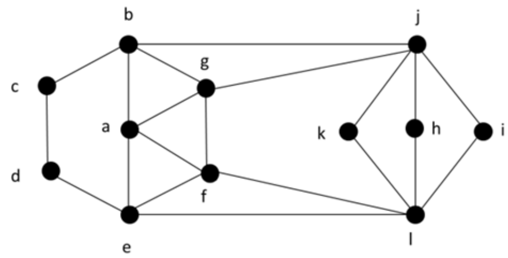
MATEMÁTICA DISCRETA II - MI

SEGUNDO PARCIAL (Soluciones)

Ejercicio 1 (7 puntos)

A) En el grafo G de la figura se han construido los recorridos eulerianos parciales [j, k, l, i, j] y [j, g, b, j], realiza los siguientes pasos del algoritmo apropiado para construir un recorrido euleriano en G.



B) Prueba que si G es un grafo conexo cuyo complementario G^C es conexo, regular y no euleriano, entonces se cumple que G es euleriano.

Razona si las siguientes afirmaciones sobre un grafo simple $G = (V, A)$ son verdaderas o falsas:

C) Un grafo simple de diámetro 1 y con 7 vértices es euleriano.

D) En un grafo euleriano no existen puentes.

Solución

A) C_1 = [j, k, l, i, j], C_2 = [j, g, b, j], C_3 = [j, h, l, f, g, a, b, c, d, e, a, f, e, l]

Recorrido euleriano en G : $C = [C_1, C_2, C_3]$

B) Si G^C es conexo y no euleriano, entonces existen $u, v \in V$ tales que $d(u), d(v)$ es impar

G^C es regular, entonces $d(v) = r$ es impar, $\forall\, v \in V$, en G^C, por tanto, card $(V) = n$ es par.

G^C regular $\Leftrightarrow G$ regular, entonces $d(v) = n - 1 - r$ es par, $\forall\, v \in V$, en $G \Rightarrow G$ es euleriano.

C) VERDADERO: K_7 es euleriano, $n = 7$ y $d(v) = 6$, $\forall\, v \in V$.

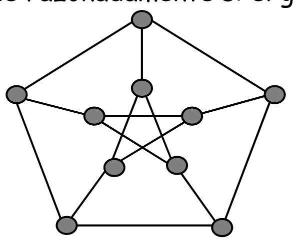
D) VERDADERO: En un grafo euleriano existe un ciclo que contiene a todas las aristas del grafo, entonces ninguna arista es puente.

Ejercicio 2 (4 puntos)

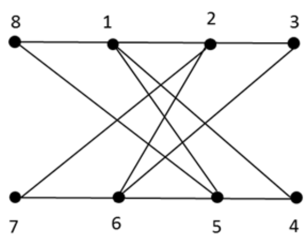
A) Enuncia una condición necesaria y una condición suficiente para decidir si un grafo es hamiltoniano.

B) Demuestra que el grafo de Petersen no es hamiltoniano.

C) Decide razonadamente si el grafo G representado por la siguiente figura es hamiltoniano.



Grafo de Petersen

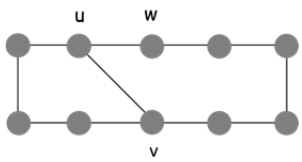


Grafo G

Solución

B) El grafo de Petersen no tiene ciclos de longitud 3 ni 4, el ciclo más pequeño es de longitud 5.

Supongamos que existe un ciclo hamiltoniano en el grafo de Petersen y que los vértices u y v definen un ciclo de longitud 5, entonces el vértice w no se puede unir con ningún vértice sin que se formen ciclos de longitud 3 o 4. Por tanto no existe un ciclo hamiltoniano en el grafo de Petersen.

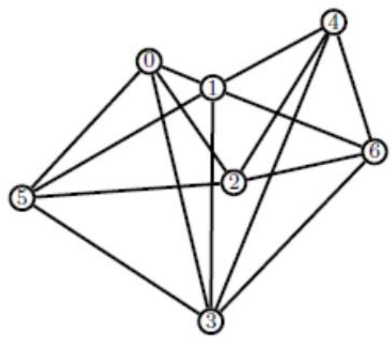


C) Si existe un ciclo hamiltoniano en el grafo G, éste debe contener las aristas {23, 36, 14, 45, 27, 76, 18, 85} incidentes en los vértices de grado 2. Dichas aristas forman 2 ciclos de longitud 4 sin vértices ni aristas comunes, por tanto, no es posible formar un ciclo de longitud 8 que contenga a todos los vértices.

Ejercicio 3 (3 puntos)

A) Demuestra que si en un grafo G de n vértices y q aristas se verifica que $q \geq \binom{n-1}{2} + 2$ entonces el grafo G es 2–conexo.

B) Obtén razonadamente el índice de conectividad por vértices y por aristas del grafo H de la siguiente figura. Indica cuántos caminos aristo–disjuntos desde el vértice 4 al vértice 5 hay en el grafo H y descríbelos.



Solución:

A) Supongamos que

$$\binom{n-1}{2} + 2 \leq q \leq \binom{n}{2} = \binom{n-1}{2} + (n-1)$$

$G = K_{n-1} \cup \{v\}$ con $2 \leq d(v) \leq (n-1)$. Si se suprime v de G, el grafo que resulta es K_{n-1} que es conexo. Si se suprime cualquier otro vértice $u \neq v$, el grado de v disminuye a lo sumo una unidad y $G - \{u\}$ es conexo. Por tanto, G es 2–conexo.

B) El índice de vértice–conectividad es igual a 3 puesto que H – {1; 2; 3} tiene dos componentes conexas y el grafo no se desconecta eliminado dos vértices del grafo.

El índice de aristo–conectividad es igual a 4 puesto que H – {01; 02; 03; 05} tiene dos componentes conexas y eliminando tres aristas del grafo H, éste no se desconecta.
Por consiguiente, hay al menos 4 caminos aristo–disjuntos entre cada par de vértices del grafo.
Entre los vértices 4 y 5 se tienen los siguientes caminos aristo-disjuntos:
4 – 1 – 5; 4 – 2 – 5; 4 – 6 – 3 – 5; 4 – 2 – 0 – 5.

Ejercicio 4 (6 puntos)

En la planta de montaje de una empresa hay una red de cintas transportadoras representada en la figura, para la instalación de las distintas componentes de cada motor. La red posee tres estaciones de entrada, P_1, P_2 y P_3, con una capacidad de admisión diaria de 600, 500 y 500 carcasas de motor respectivamente, aunque en el momento actual sólo se reciben 300 carcasas diarias en cada estación. Las etiquetas de cada cinta indican su capacidad de trabajo diaria y, en recuadro, el ritmo al que se trabaja hoy (en centenas).

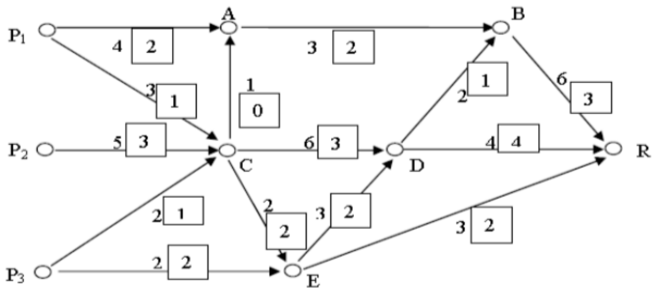
MATEMÁTICA DISCRETA II - MI

SEGUNDO PARCIAL (Soluciones)

A) Enuncia el teorema de Ford – Fulkerson, definiendo todos los conceptos que intervienen en él.

B) ¿Cuál es el número máximo de motores que se podrían montar en un día?

C) Se desean instalar arcos de pintura por impregnación en algunas cintas para abreviar el tiempo de fabricación. El coste de la instalación en cada cinta es proporcional a su capacidad. ¿En qué cintas hay que colocarlos para minimizar el coste?



Solución:

B) $f_0 = 9$

Camino de f – aumento: { s, P_1, A, B, R } de residuo $k = 1 \Rightarrow val(f_1) = 10$

Camino de f – aumento: { s, P_1, C, D, B, R } de residuo $k = 1 \Rightarrow val(f_2) = 11$

Camino de f – aumento: { s, P_1, C, D, E, R } de residuo $k = 1 \Rightarrow val(f_3) = 12$

Valor máximo del flujo: $val(f) = 1200$ = máx. número de motores que se podrían montar en un día.

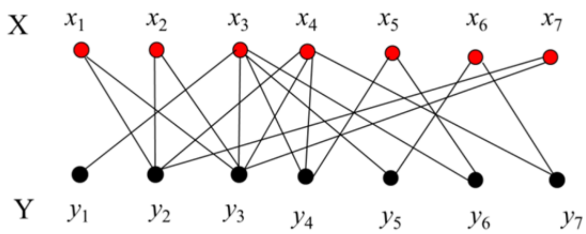
C) Corte con capacidad mínima: S = { s, P_1, P_2, P_3, C, A, D, E }, T = { B, R }, cap(S, T) = 1200.

Para minimizar el coste los arcos de pintura por impregnación se colocarán en las cintas

{AB, DB, DR, ER}.

Ejercicio 5 (5 ptos.)

Se considera el siguiente grafo bipartido $G = (X \cup Y, A)$ que representa las preferencias de los 7 médicos y los 7 enfermeros para realizar las guardias en una consulta de urgencias. Se quieren planificar las vacaciones, respetando las preferencias anteriores, de modo que siempre queden de guardia un médico y un enfermero.



A) Utilizando el algoritmo correspondiente, halla un emparejamiento máximo M´ para el grafo de la figura, a partir del emparejamiento inicial M = { {x_1, y_2 }, { x_2, y_3 }, { x_3, y_1 }, { x_4, y_4 }}.

B) Halla un recubrimiento por vértices de cardinal mínimo en el grafo de la figura.

C) Escribe todas las relaciones verdaderas entre los números A, B, C, D, α (G), $\alpha'(G)$, β (G), y justifícalas citando los teoremas correspondientes, siendo

A = máx. nº de caminos internamente disjuntos del vértice s al vértice t en G,
B = máx. nº de caminos aristo – disjuntos del vértice s al vértice t en G,
C = mín. nº de vértices en un conjunto que separa el vértice s del vértice t en G,
D = mín. nº de aristas en un conjunto que separa el vértice s del vértice t en G.
α (G) = máx. nº de vértices en un conjunto independiente I de G,
$\alpha'(G)$ = máx. nº de aristas en un emparejamiento M de G,
β (G) = mín. nº de vértices en un recubrimiento K de G.

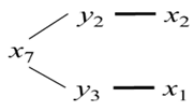
Solución

A) A partir del emparejamiento inicial M = { $\{x_1, y_2\}$, $\{x_2, y_3\}$, $\{x_3, y_1\}$, $\{x_4, y_4\}$ },

se elige x_5 vértice no emparejado de X y se construye un árbol BEA de caminos alternados parciales con raíz en x_5. Existe camino de M – aumento $\{x_5, y_6\}$

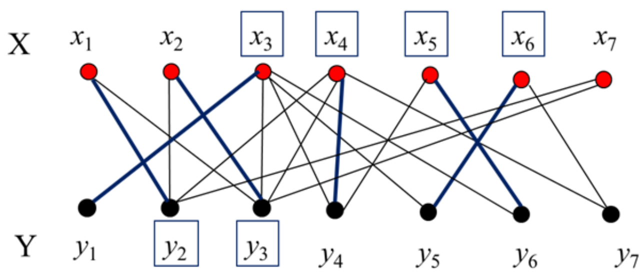
se elige x_6 vértice no emparejado de X y se construye un árbol BEA de caminos alternados parciales con raíz en x_6. Existe camino de M – aumento $\{x_6, y_5\}$

se elige x_7 vértice no emparejado de X y se construye un árbol BEA de caminos alternados parciales con raíz en x_7. no existe camino de M – aumento con raíz en 7.



El emparejamiento obtenido M´ = { $\{x_1, y_2\}$, $\{x_2, y_3\}$, $\{x_3, y_1\}$, $\{x_4, y_4\}$, $\{x_5, y_6\}$, $\{x_6, y_5\}$ } es máximo.

B) Se añade una fuente s unida a todos los vértices de X y se añade un sumidero t unido a todos los vértices de Y, con capacidad cap (s, x_i) = cap (s, y_j) = 1.



El corte mínimo S = $\{s, x_1, x_2, x_7, y_2, y_3\}$, T = $\{t, y_1, y_4, y_5, y_6, y_7, y_5, x_3, x_4, x_5, x_6\}$, con cap (S, T) = 6.

M´ = { $\{x_1, y_2\}$, $\{x_2, y_3\}$, $\{x_3, y_1\}$, $\{x_4, y_4\}$, $\{x_5, y_6\}$, $\{x_6, y_5\}$ } es un emparejamiento máximo y

K = { $x_3, x_4, x_5\ x_6, y_2, y_3$ } es un recubrimiento.

Como card M = card K, por el teorema de König, M es máximo y K es mínimo.

C) Teorema de Menger (versión vértices): A = C. Teorema de Menger (versión aristas): B = D.

A = $\alpha'(G)$ C = $\beta(G)$ α (G) + β (G) = n Teorema de König: $\alpha'(G) = \beta(G)$